

Дифракция волн на двухпериодической плоской решетке из непрерывных криволинейных металлических лент

П.Л. Младенов, С.Л. Просвирнин

Радиоастрономический институт Национальной академии наук Украины,
61002, Харьков, ул. Краснознаменная, 4.

1. Введение

Исследование дифракции электромагнитных волн на периодических решетках из бесконечно длинных идеально проводящих цилиндров того или иного поперечного сечения представляет собой классическую проблему математической теории дифракции. К настоящему времени разработаны строгие численно-аналитические методы решения соответствующих краевых задач и получено огромное количество фактического материала о дифракционных характеристиках разнообразных структур. Однако область применимости этих результатов ограничена, поскольку структуры предполагаются однопериодическими.

Свойства плоских структур периодических по двум направлениям в пространстве существенно отличаются от свойств однопериодических, значительно разнообразнее и интересны для использования в приложениях. Такие решетки применяются в микроволновой технике в качестве частотно и поляризационно селективных поверхностей [1], элементов искусственных диэлектриков. В частности, в последние годы стало актуальным исследование так называемых *photonic band gap* (PBG) структур – периодических структур с чередующимися полосами прозрачности и непрозрачности в микроволновом диапазоне. В связи с исследованием свойств PBG-структур с помощью численных методов была рассмотрена дифракция волн на плоских однослойных и многослойных регулярных решетках из криволинейных лент, которые расположены в плоскости решетки и имеют форму букв С, S и Ω а также из других элементов сложной формы, в свободном пространстве и на диэлектрической подложке [2 – 5].

Рассмотренные в этих работах решетки построены из полосковых элементов, расположенных в отдельных ячейках периодической структуры и не соединенных между собой электрически. Если форму элементов выбрать такой, чтобы элементы решетки, расположенные в соседних ячейках вдоль одного из направлений периодичности, были соединены между собой, можно получить двухпериодическую решетку из непрерывных криволинейных лент.

Численное решение задачи дифракции методом моментов, приближенные аналитические формулы и некоторые результаты в виде частотных зависимостей коэффициента отражения для таких решеток из лент простой формы приведены в [6]. Нам неизвестны какие-либо другие работы по анализу дифракции волн на плоских решетках из криволинейных лент. В [7] рассмотрено численное решение задачи о возбуждении плоской волной тонкого провода, имеющего периодическую форму в виде меандра.

Цель настоящей работы состоит в описании методики решения задачи дифракции и некоторых результатов расчета коэффициента отражения в одноволновом режиме при нормальном падении волны на решетки из бесконечно длинных криволинейных лент разной формы, а также сопоставлении их дифракционных свойств со свойствами классической ленточной дифракционной решетки, которая представляет собой однопериодическую структуру, образованную плоскими прямолинейными бесконечно длинными лентами.

2. Постановка задачи и метод численного решения

Пусть на периодическую с периодами d_x и d_y ленточную решетку, расположенную в плоскости xOy (см. рис. 1), падает плоская электромагнитная волна

$$\vec{E}^i = \vec{P} \exp(-i\vec{k}^i \vec{r}), \quad (1)$$

где \vec{P} - вектор поляризации, $P=1$; \vec{k}^i - волновой вектор падающей волны, $k^i = k$, $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Для простоты будем рассматривать только случай наклонного падения при условии $k_x^i = 0$. Здесь и далее предполагается зависимость от времени вида $\exp(i\omega t)$.

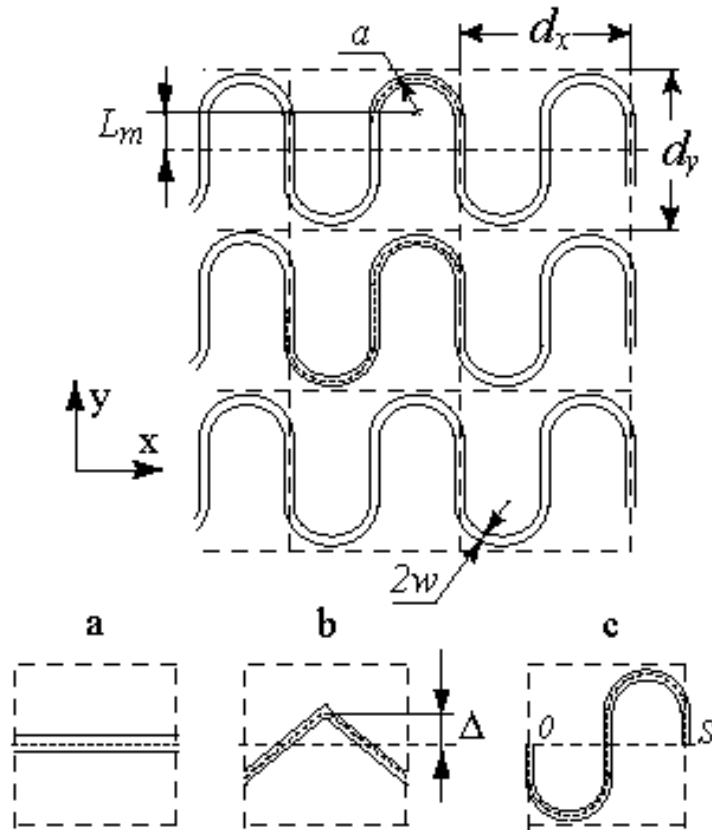


Рис.1 Плоская периодическая в двух направлениях решетка и некоторые варианты геометрии периода

В качестве элементов решетки взяты плоские периодические непрерывные идеально проводящие ленты, имеющие на периоде произвольную форму. Период ленты значительно больше ее ширины. Ширина ленты может изменяться в пределах периода. Предполагается, что продольная компонента тока, текущего по ленте, существенно превосходит поперечную компоненту и поэтому поперечной составляющей тока можно пренебречь.

Будем искать поле во всем пространстве в виде суперпозиции поля падающей электромагнитной волны \vec{E}^i и рассеянного поля \vec{E}^s

$$\vec{E} = \vec{E}^i + \vec{E}^s.$$

Рассеянное поле представляет собой излучение тока с некоторой неизвестной поверхностной плотностью \vec{J} , наведенного на лентах решетки.

Любое локальное распределение плотности поверхностного тока в плоскости $z=0$ $\vec{J}(\vec{\rho})$ и его поле излучения $\vec{E}^s(\vec{r})$ можно представить в виде интегралов Фурье

$$\vec{J}(\vec{\rho}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}(\vec{\kappa}) \exp(-i\vec{\kappa}\vec{\rho}) d\vec{\kappa},$$

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}^s(\vec{\kappa}) \exp[-i\vec{\kappa}\vec{\rho} - i\gamma(\vec{\kappa})|z|] d\vec{\kappa},$$

где $\vec{r} = \vec{\rho} + \hat{e}_z z$, $\vec{\rho}$ - радиус-вектор в плоскости $z=0$, \hat{e}_z - орт оси Oz ; $\gamma(\vec{\kappa}) = \sqrt{k^2 - \kappa^2}$, $\text{Im} \gamma \leq 0$. Преобразование Фурье поля излучения выражается через преобразование Фурье плотности поверхностного тока в плоскости xOy . Если представить преобразование Фурье рассеянного поля в виде суммы компонент параллельной к плоскости решетки и перпендикулярной к ней

$$\vec{E}^s = \vec{E}_t + \hat{e}_z E_z,$$

то получим:

$$\tilde{E}_t = -\frac{Z_0}{2\kappa^2} \left[\frac{\gamma}{k} \tilde{\kappa}(\tilde{J}, \tilde{\kappa}) + \frac{k}{\gamma} \tilde{\kappa}_\perp(\tilde{J}, \tilde{\kappa}_\perp) \right],$$

$$\tilde{E}_z = \frac{Z_0}{2k} (\tilde{J}, \tilde{\kappa}).$$

где $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$, Ом; $\tilde{\kappa}_\perp = [\tilde{\kappa}, \hat{e}_z]$.

Таким образом, известны линейные операторы:

$$\tilde{E}_t(\tilde{\kappa}) = \{ \tilde{E}_t \tilde{J} \}(\tilde{\kappa}),$$

$$\tilde{E}_z(\tilde{\kappa}) = \{ \tilde{E}_z \tilde{J} \}(\tilde{\kappa}),$$

которые ставят в соответствие преобразованию Фурье плотности поверхностного тока преобразования Фурье поперечной и параллельной к оси Oz компонент поля излучения.

Периодическая решетка состоит из одинаковых прямоугольных ячеек, имеющих стороны d_x и d_y и выбранных тем или иным образом, например так, как показано на рис. 1. Перенумеруем ячейки так, чтобы каждой из них соответствовала пара чисел (m, n) и радиус-вектор от ячейки, расположенной в начале координат (дадим ей номер $(0,0)$), к ячейке (m, n) определялся выражением

$$\vec{\rho}_{mn} = md_x \hat{e}_x + nd_y \hat{e}_y.$$

Поскольку падающая волна плоская, ленты решетки возбуждаются полем с одинаковой амплитудой и с линейным сдвигом фазы. Если поверхностную плотность тока на ленте в пределах ячейки $(0,0)$ обозначить $\tilde{J}_{00}(\vec{\rho})$, то на ленте в ячейке (m, n) поверхностная плотность тока равна $\tilde{J}_{00}(\vec{\rho}') \exp(-i\vec{k}^i \vec{\rho}_{mn})$, где $\vec{\rho}'$ - радиус вектор в локальной системе координат связанной с элементом (m, n) . Поэтому для преобразования Фурье плотности поверхностного тока получаем выражение

$$\tilde{J}_{mn}(\tilde{\kappa}) = \tilde{J}_{00}(\tilde{\kappa}) \exp[i(\tilde{\kappa} - \tilde{k}^i) \vec{\rho}_{mn}].$$

Неизвестную функцию – преобразование Фурье плотности поверхностного тока на части ленты (область D) в пределах ячейки с номером $(0,0)$ будем искать из интегрального уравнения, которое представляет собой условие равенства нулю тангенциальной компоненты электрического поля на поверхности ленты

$$\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \tilde{E}_t \tilde{J} \}(\tilde{\kappa}) \exp[i(\tilde{\kappa} - \tilde{k}^i) \vec{\rho}_{mn} - i\tilde{\kappa} \vec{\rho}] d\tilde{\kappa} + \tilde{E}_t^i(\vec{\rho}) = 0, \quad (2)$$

$$\vec{\rho} \in D,$$

где \tilde{E}_t^i - поперечная к оси Oz компонента поля \tilde{E}^i в плоскости $z = 0$, для краткости индекс $(0,0)$ у функции \tilde{J}_{00} в уравнении (2) и всюду далее опущен.

Если поверхностная плотность тока найдена, с помощью формулы суммирования Пуассона легко получить представление для поля во всем пространстве в виде суперпозиции пространственных гармоник

$$\vec{E} = \vec{E}^i + \sum_{\mu, \nu=-\infty}^{\infty} \bar{a}_{\mu\nu} \exp\{-i[\vec{k}_{\mu\nu} \vec{\rho} + |z|\gamma(\vec{k}_{\mu\nu})]\},$$

где

$$\bar{a}_{\mu\nu} = \frac{1}{d_x d_y} \{ \vec{E}^s \vec{J} \}(\vec{k}_{\mu\nu}),$$

$$\vec{k}_{\mu\nu} = \hat{e}_x \frac{2\pi\mu}{d_x} + \hat{e}_y \left(k_y^i + \frac{2\pi\nu}{d_y} \right).$$

Форму ленты на периоде будем задавать уравнением ее "средней" линии, показанной штриховой кривой на рис.1,

$$\vec{\rho} = \vec{q}(s)$$

и шириной полоска $2w(s)$ в направлении нормали к средней линии; s - длина дуги вдоль средней линии от одной до другой стороны ячейки. Точка на ленте может быть задана вектором

$$\vec{\rho} = \vec{q}(s) + \hat{n}u,$$

который зависит от двух параметров $s \in [0, S]$ и $u \in [-w(s), w(s)]$, $\hat{n} = \vec{q}'(s)/q''(s)$ - единичный вектор нормали к средней линии, штрихи обозначают производные по s .

Решение интегрального уравнения (2) будем искать методом моментов. Поверхностную плотность тока представим в виде

$$J(\vec{\rho}) = \hat{t}(s) \frac{I(s)}{\sqrt{1 - [u/w(s)]^2}},$$

где $\hat{t} = \vec{q}'(s)$ - единичный вектор касательной к средней линии. Вид поперечного распределения выбран так, чтобы аналитически описать особенности плотности тока у ребер ленты. Неизвестную функцию продольного распределения тока $I(s)$ будем искать в виде разложения в ряд

$$I(s) = \sum_{\beta=0}^N c_{\beta} V_{\beta}(s)$$

по базисным функциям $V_{\beta}(s)$. В качестве базисных функций выберем "функции - крышки"

$$V_{\beta}(s) = \begin{cases} 1 - |s - s_{\beta}|/h, & s \in [s_{\beta-1}, s_{\beta+1}] \\ 0, & s \notin [s_{\beta-1}, s_{\beta+1}] \end{cases},$$

где $s_{\beta} = h\beta$, $h = S/N$, $\beta = 0, 1, 2, \dots, N$. Поскольку ленты непрерывны вдоль оси Ox и рассматривается наклонное падение плоской волны при $k_x^i = 0$, коэффициенты, которые определяют плотность поверхностного тока в точках на границе ячейки, равны между собой: $c_0 = c_N$.

Далее, следуя схеме метода моментов аналогичной использованной и подробно изложенной в [2, 3], получим систему линейных алгебраических уравнений относительно

коэффициентов $\{c_\beta\}_{\beta=1}^N$. Для краткости приведем здесь только окончательный вид системы уравнений:

$$\sum_{\beta=1}^N A_{\alpha\beta} c_\beta = f_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

где

$$A_{\alpha\beta} = \frac{\pi^2 h}{d_x d_y} w_\alpha w_\beta \sum_{q,p=-\infty}^{\infty} J_0(\bar{k}_{\mu\nu} \hat{n}_\alpha w_\alpha) J_0(\bar{k}_{\mu\nu} \hat{n}_\beta w_\beta) \text{sinc}^2\left(\frac{h}{2} \bar{k}_{\mu\nu} \hat{t}_\alpha\right) \times \\ \times \text{sinc}^2\left(\frac{h}{2} \bar{k}_{\mu\nu} \hat{t}_\beta\right) (\hat{E}_i \hat{t}_\beta)(\bar{k}_{\mu\nu}) \exp[i\bar{k}_{\mu\nu}(\bar{q}_\beta - \bar{q}_\alpha)], \quad (4)$$

$$f_\alpha = -\pi w_\alpha \hat{t}_\alpha \bar{P} J_0(\bar{k}^i \hat{n}_\alpha w_\alpha) \exp(-i\bar{k}^i \bar{q}_\alpha),$$

$\text{sinc}(x) = \sin x/x$, $\hat{t}_\beta = \hat{t}(s_\beta)$, $w_\beta = w(s_\beta)$, $\bar{q}_\beta = \bar{q}(s_\beta)$, $J_0(x)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

3. Анализ численных результатов

В качестве тестового примера были рассчитаны частотные зависимости коэффициентов прохождения и отражения, а также амплитуд дифракционных гармоник для решетки из прямых лент (рис. 1,а) в случае нормального падения плоской волны поляризованной вдоль лент. Поскольку структура является однопериодической, то величина dx не оказывает влияния на результат вычислений, как следствие, в системе уравнений (3) можно выбрать любые $N \geq 1$. Точность вычисления элементов матрицы системы уравнений зависит от того, какими выбраны максимальные значения абсолютных величин индексов суммирования в (4). Из-за того, что рассматриваемая решетка однородна в направлении оси Ox , влияние на погрешность оказывает лишь точность суммирования по индексу ν .

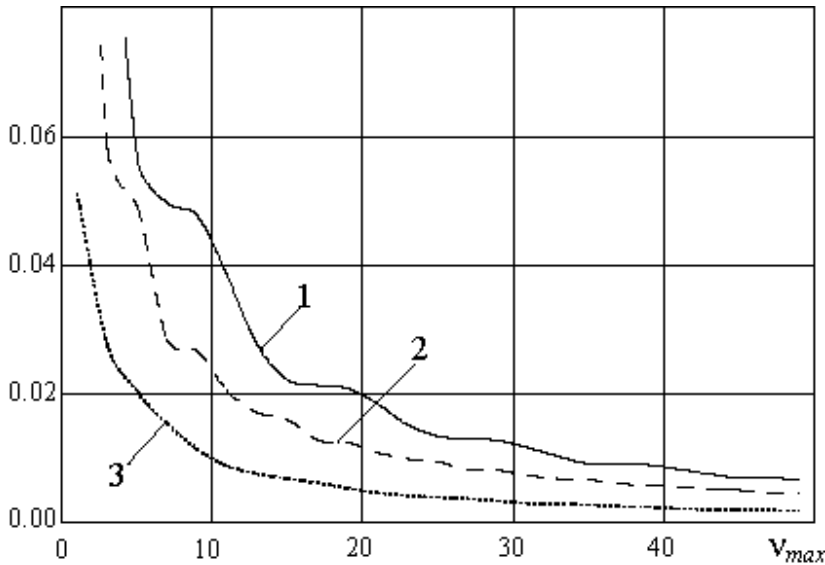


Рис.2. Зависимость относительной ошибки вычисления модуля коэффициента отражения решетки из прямых лент от v_{max} : $d_x = d_y$, $d_y/\lambda = 0.5$, $2w/d_y = 0.1$ (кривая 1), $2w/d_y = 0.2$ (кривая 2), $2w/d_y = 0.4$ (кривая 3).

Было проведено сравнение результатов, полученных в диапазоне относительной частоты $0 < d_y/\lambda < 3$ по разработанному нами алгоритму и по алгоритму на основе строгого «метода задачи

Римана-Гильберта» [8]. Абсолютные величины амплитуд основной и первой гармоник, вычисленных строгим численно-аналитическим методом и методом моментов, практически совпадают (различие составляет менее одного процента) во всем рассмотренном диапазоне изменения d_y/λ . О величине относительной ошибки определения модуля коэффициента

отражения (в сравнении с его значением, полученным строгим методом) и ее зависимости от максимального значения абсолютной величины индекса суммирования v_{max} можно судить по типичным графикам, показанным на рис. 2 для $d_y/\lambda = 0.5$. Уменьшение относительной ошибки с увеличением ширины ленты объясняется возрастанием коэффициента отражения при примерно постоянной величине абсолютной погрешности его вычисления.

Если оба периода решетки меньше длины волны: $d_x/\lambda < 1$ и $d_y/\lambda < 1$, то как в отраженном \vec{E}^r , так и в прошедшем поле \vec{E}^t в дальней зоне имеется только основная, распространяющаяся по нормали к решетке, пространственная гармоника

$$\vec{E}^r = \vec{R} \exp(-ikz), \quad \vec{E}^t = \vec{T} \exp(ikz),$$

где $\vec{R} = \vec{a}_{00}$, $\vec{T} = \vec{P} + \vec{a}_{00}$. Далее ограничимся анализом дифракции в этом одноволновом режиме.

Рассмотрим решетку из лент, имеющих форму меандра с закругленными углами (рис. 1,с). Пусть падающая волна поляризована вдоль лент: $\vec{P} = \hat{e}_x$ (E-поляризация). Если длина ленты в пределах периода меньше, чем длина волны, то распределение тока вдоль ленты незначительно изменяется с изменением частоты. Однако его величина зависит от формы ленты и уменьшается при увеличении длины ленты в пределах границ ячейки решетки. Ясно, что ток, наведенный на криволинейной ленте, имеет на отдельных ее участках как x -, так и y - составляющие. Поперечная к основному направлению ленты составляющая тока имеет противоположные направления на симметричных участках ленты и поэтому ее поле компенсируется и не приводит к появлению ни в прошедшем, ни в отраженном поле составляющих, поляризованных ортогонально к полю падающей волны.



Рис.3. Зависимость модуля коэффициента отражения E-поляризованной волны от относительной частоты d_y/λ для решетки из лент с параметрами $d_x = d_y$, $2w/d_y = 0.05$, имеющих форму меандра для различных значений L_m/d_y : кривая 1 – 0.0, кривая 2 – 0.25, прямые ленты – кривая 3.

соответствующего уменьшения величины наведенного тока, уменьшается и модуль коэффициента отражения решетки.

Ленту в форме меандра с большой амплитудой ($L_m/d_y = 0.25$) можно рассматривать как проводник, периодически нагруженный двухпроводными короткозамкнутыми линиями [6]. В зависимости от электрической длины отрезков этих линий их входное сопротивление может изменяться от нуля до бесконечности. Частотная характеристика модуля коэффициента отражения решетки в этом случае является резонансной, и на ней имеются как точки полного отражения, так и полного пропускания.

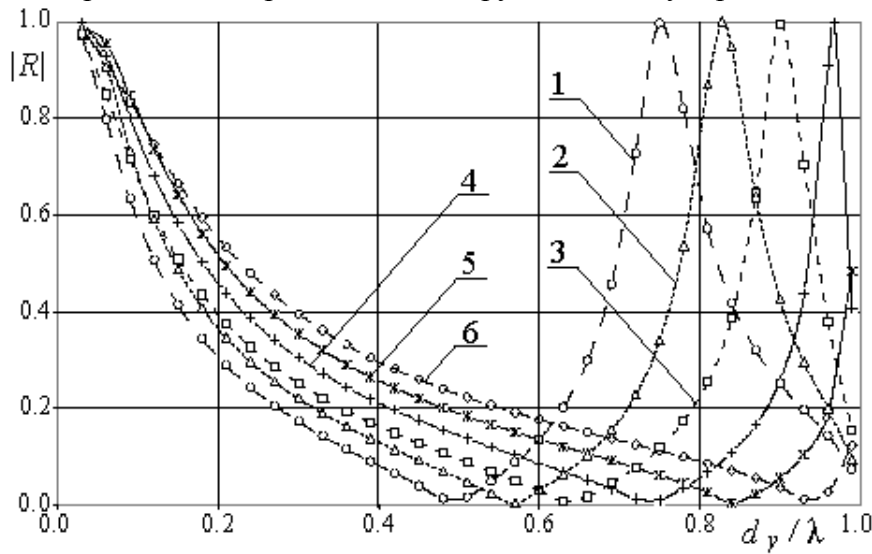


Рис.4. Зависимость модуля коэффициента отражения Е-поляризованной волны от относительной частоты d_y/λ для решетки из лент с параметрами $d_x = d_y$, $2w/d_y = 0.05$, имеющих форму меандра для различных значений L_m/d_y : кривая 1 – 0.25, кривая 2 – 0.2, кривая 3 – 0.15, кривая 4 – 0.1, кривая 5 – 0.05, кривая 6 – 0.0.

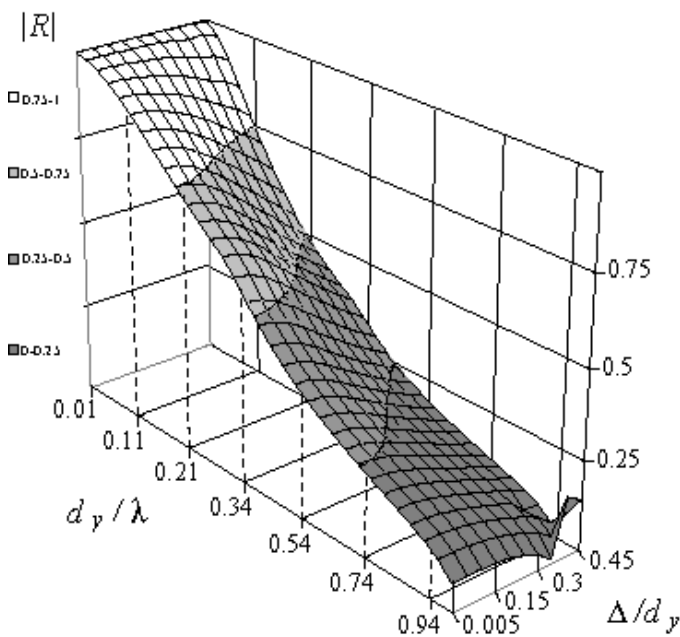


Рис.5. Зависимость модуля коэффициента отражения Е-поляризованной волны от относительной частоты d_y/λ и максимального отклонения линии от средней прямой для решетки из лент имеющих пилообразную форму с параметрами $d_x = d_y$, $2w/d_y = 0.05$.

Поверхности, которая демонстрирует как частотную зависимость абсолютной величины коэффициента отражения R , так и ее зависимость от величины амплитуды пилообразной

Прoанализируем, каким образом изменяются частотные характеристики модуля коэффициента отражения решетки из лент в форме меандра в зависимости от величины

L_m , т.е. от амплитуды меандра. Семейство таких кривых представлено на рис. 4. С уменьшением амплитуды меандра резонанс полного прохождения перемещается в область с меньшей длиной волны, что приблизительно соответствует условию $2L_m = \lambda/4$, которое определяет длину отрезка короткозамкнутой линии (половина периода меандра) с бесконечно большим входным сопротивлением.

Пусть теперь решетка составлена из пилообразных лент (рис. 1,в). Проанализируем изменение частотных характеристик прохождения и отражения решетки, при постепенном изменении формы лент: от прямой линии до пилообразной с амплитудой практически равной половине расстояния между соседними лентами (половине периода решетки d_y). Результаты такого анализа представлены на рис. 5 в виде

средней линии ленты. При достаточно больших амплитудах пилообразной линии проявляется резонанс, отмечавшийся выше у решетки из лент в форме меандра.

Рассмотрим возбуждение решетки плоской волной поляризованной вдоль оси Oy : $\vec{P} = \hat{e}_y$ (Н-поляризация). В этом случае ленту на периоде можно разделить на два плеча с различным направлением тока. Излучения x -компонент этих токов на периоде

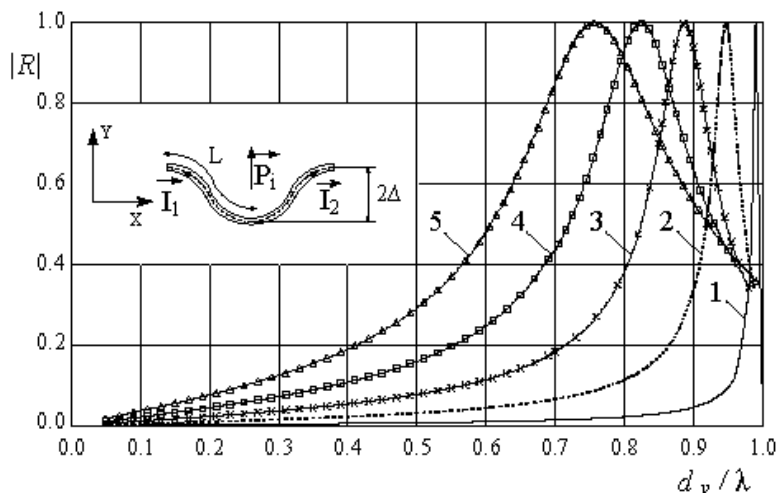


Рис.6. Зависимость модуля коэффициента отражения Н-поляризованной волны от относительной частоты d_y/λ для решетки из лент с параметрами $d_x = d_y$, $2w/d_y = 0.05$, имеющих форму волнистой линии для различных значений Δ/d_y : кривая 1 - 0.05, кривая 2 - 0.1, кривая 3 - 0.15, кривая 4 - 0.2, кривая 5 - 0.25.

$L \approx \lambda/2$. С увеличением резонансной частоты при уменьшении отклонения формы ленты от прямой линии, возрастает добротность резонанса полного отражения. Это является следствием снижения радиационных потерь в результате уменьшения y -компоненты тока. С увеличением отклонения ленты от прямой линии, увеличиваются потери на излучение, а, следовательно, добротность уменьшается.

4. Заключение

Классическая плоская ленточная дифракционная решетка имеет частотные характеристики с особенностями в точках скольжения первой и высших пространственных гармоник – так называемые аномалии Вуда. Какие-либо другие резонансы при дифракции волн на простой ленточной решетке не наблюдаются.

Дифракционные характеристики плоской двухпериодической решетки из криволинейных металлических лент значительно сложнее даже в одноволновом частотном диапазоне. Благодаря тому, что в пределах одной ячейки-периода, диаметр которой меньше длины волны, может быть размещен проводник с длиной превышающей длину волны, возникают резонансы полного отражения и прохождения, принципиально невозможные у решеток из прямых непрерывных лент. Добротность некоторых из этих резонансов может быть весьма высокой, несмотря на то, что электродинамическая структура бесконечно тонкая. Этот тип резонансов можно отнести к так называемым резонансам на запертых модах. Мода тока в таких резонансах создает поле с малыми радиационными потерями в пространство вне решетки. Имеются также резонансы другого типа, не отличающиеся высокой добротностью, но существенно меняющие дифракционные характеристики двухпериодической ленточной решетки по сравнению с классической решеткой.

компенсируют друг друга, а поля излучения параллельных оси Oy складываются. Наибольшая амплитуда тока на ленте достигается при приближении длины плеча L к половине длины волны. Семейство кривых, характеризующих частотную зависимость абсолютного значения коэффициента отражения плоской решетки, состоящей из волнообразных лент в виде соединенных дуг окружностей, при возбуждении Н-поляризованной волной для случаев разной амплитуды отклонения средней линии лент от прямой, представлено на рис. 6. При изменении Δ изменяется частота полного отражения в соответствии с приближенным соотношением

Литература

1. C.C. Chen. Transmission through a conducting screen perforated periodically with apertures. IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-18, No. 9, pp. 627-632.
2. С.Л. Просвирнин. Преобразование поляризации при отражении волн микрополосковой решеткой из элементов сложной формы. Радиотехника и электроника. 1999, т. 44, № 6, с.681-686.
3. Т.Д. Васильева, С.Л. Просвирнин. Дифракция электромагнитных волн на плоской решетке из киральных полосковых элементов. Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 1998, т.1, 4, с.5-9.
4. S. Zouhdi, G. E. Couenon, A. Fourier-Lamer. Scattering from a periodic array of thin planar chiral structures - calculation and measurements, IEEE Trans. Antennas Propagat., 1999, vol. 47, no. 6, pp. 1061 – 1065.
5. S.L. Prosvirnin, S. Zouhdi. Multi-layered arrays of conducting strips: switchable photonic band gap structures. Int. J. Electron. Commun., 2001, v. 55, no. 4, pp. 260-265.
6. S.L. Prosvirnin, S.A. Tretyakov, P.L. Mladyonov, Electromagnetic wave diffraction by planar periodic gratings of wavy metal strips. J. Electromagnetic Waves and Applications, vol. 16, no. 3, pp. 421-435, 2002.
7. Pierre Poey, Pierre-Luis Guigue. Determination of Current Distribution on an Infinite Periodic Structure of Thin-Metallic Wires. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 32, no. 1, 1984.
8. В.П. Шестопапов. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков, 1972.